

PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE APLICADO A UMA VAN ESCOLAR UTILIZANDO DUAS ABORDAGENS DE ELIMINAÇÃO DE SUB-ROTAS

João Pedro de Sá Moreira

Instituto Federal de São Paulo, IFSP – CBT, Cubatão, SP, Brasil

Eduarda Neves da Silva

Instituto Federal de São Paulo, IFSP – CBT, Cubatão, SP, Brasil

Glauber Renato Colnago

Instituto Federal de São Paulo, IFSP – CBT, Cubatão, SP, Brasil

Resumo: As vans escolares estão presentes por todo Brasil, tendo como principal objetivo buscar estudantes em diversos pontos específicos de uma região, levá-los a seus locais de estudo, e retornar para o ponto inicial. Posto isto, há dificuldades na hora de definir a ordem de busca e entrega dos estudantes devido ao número de possibilidades, e determinar isto é crucial para a minimização do gasto de recursos. Este tipo de problema pode ser tratado por meio da Pesquisa Operacional como um problema de otimização, tomando como base o problema do caixeiro viajante apresentado na literatura. O objetivo deste trabalho é modelar matematicamente o trajeto de uma van escolar que opera nas cidades de Santos e Cubatão, ambas no estado de São Paulo, com alunos do IFSP – Câmpus Cubatão, e aplicar um problema de otimização visando minimizar a distância percorrida pela van ao mesmo tempo que testa duas abordagens diferentes de restrições de eliminações de sub-rotas. Foram obtidos resultados satisfatórios para a resolução do problema de otimização e chegou-se à conclusão que a aplicação de cada abordagem de eliminação de sub-rotas depende do problema tratado.

Palavras-chave: Otimização, Caixeiro Viajante, Vans Escolares.

Abstract: School vans are present throughout Brazil, with the main objective of finding students in several specific points of a region, taking them to their places of study, and then returning to the starting point. Given this, there are difficulties in defining the order

of search and delivery of students due to the number of possibilities, and determining this is crucial for minimizing the expense of resources. This type of problem can be treated through Operational Research as an optimization problem, based on the problem of the traveling salesman presented in the literature. The objective of this work is to mathematically model the trajectory of a school van that operates in the cities of Santos and Cubatão in the State of São Paulo with students only from the IFSP - Cubatão Campus, and apply a optimization problem aiming at minimizing the distance traveled by the van while testing two different approaches of sub-tour elimination constraints. Satisfactory results have been obtained for the resolution of the optimization problem and it is concluded that the application of each sub-tour elimination approach depends on the problem addressed.

Keywords: *Optimization, Traveling Salesman, School vans.*

INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste trabalho consiste em modelar matematicamente o processo de busca e entrega de alunos por uma van escolar do litoral de São Paulo, resolver o modelo como um problema de otimização de maneira a minimizar a distância total percorrida ao mesmo tempo que analisa o emprego de duas abordagens diferentes de restrições para eliminar sub-rotas. O estudo de caso foi aplicado a uma van responsável por alunos de Santos com o destino final no Instituto Federal de São Paulo - Câmpus Cubatão (IFSP – CBT).

Uma forma de solucionar este problema seria elencar todas as possibilidades de trajetos possíveis e escolher a de menor distância. Ao fazer isto, o problema de otimização seria reduzido a um problema de enumeração (TAUFER e PEREIRA, 2011) que é inviável de ser solucionado manualmente devido à grande quantidade de possibilidades de rotas existentes.

Visando então a implementação computacional, o problema deve então ser tratado como um problema do caixeiro viajante (TSP - *travelling salesman problem*), o qual consiste em um caixeiro que deve visitar n cidades em sua área de vendas, sendo associado a cada par de cidades um custo relativo à distância, o caixeiro deve

percorrer a rota mais curta de modo que passe uma única vez por todos os pontos de entrega e retorne para seu ponto inicial de partida (MATAI et al, 2010). Pode-se especificar ainda mais o caso, classificando-o como um ATSP (*Asymmetric Travelling Salesman Problem*), onde a distância de ida de um ponto a outro não é a mesma que a rota de retorno, portanto existe uma dependência no sentido da trajetória (ABREU et al, 2015).

Baseando-se no ATSP, podemos associar a cidade inicial (ponto de partida) com a casa do motorista da van e cada cidade com os pontos de busca dos alunos, sendo o IFSP - CBT a última cidade que deve ser visitada.

A rota pode ser graficamente representada por um grafo onde cada vértice é um ponto de parada enquanto as arestas são os caminhos ligando estes pontos. Portanto os dados poderão ser manipulados através de matrizes. Essa é uma das formas mais utilizadas para tratar o problema, e isto pode ser enfatizado pela literatura, como pode ser visto em Jain & Bhanot (2012), que exemplificou a aplicação do problema em uma situação fictícia e apresenta restrições que podem ser utilizadas para contornar infactibilidades, ou então Steiner (2000) e Giordani & Bau (2014) que tratam o problema aplicando-o em vans escolares também.

A estruturação segue com a seção Modelagem Matemática apresentando o modelo matemático do problema de otimização sobre o estudo de caso, a seção Materiais e Métodos que descreverá o processo de desenvolvimento da pesquisa, a seção Resultados e Discussões, onde os resultados obtidos serão apresentados e, por fim, a seção Conclusão.

MODELAGEM MATEMÁTICA

Para modelar o caso como um problema de otimização, deve-se criar um modelo matemático composto por uma função objetivo, variáveis de decisão que terão seus valores alterados ao longo do processo de solução e um conjunto de restrições a serem satisfeitas. A formulação utilizada para o desenvolvimento do modelo é uma formulação clássica para problemas do caixeiro viajante, com algumas modificações. Öncan et al (2007) apresentam uma comparação entre diferentes tipos de modelos para problemas de caixeiro viajantes assimétricos e, dentre os modelos apresentados, a formulação base utilizada foi:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a rota do vértice } i \text{ para o } j \text{ é considerada} \\ 0 & \text{se o contrário ocorre} \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

$$D_{ij}: \text{Distância entre vértice } i \text{ e } j \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij} X_{ij} \quad (3)$$

s.a

$$\sum_i^n X_{ij} = 1, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

$$\sum_j^n X_{ij} = 1, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

$$X_{ij} \in \{0, 1\} \quad (6)$$

onde

n : número de pontos de parada.

Em (1) encontra-se a variável binária principal $X_{i,j}$ que representa a escolha ou não de uma aresta para a solução final, (2) representa o parâmetro bidimensional de distância entre os vértices i e j , a função objetivo está representada em (3), enquanto em (4) e (5) estão as restrições que garantem que só é possível chegar e sair de um ponto de parada apenas uma única vez. A restrição (6) garante que a variável $X_{i,j}$ seja binária. Para adequar o modelo ao estudo de caso, deseja-se que a última rota conecte o IFSP – CBT ao ponto de partida (casa do motorista), portanto deve-se adicionar mais uma restrição.

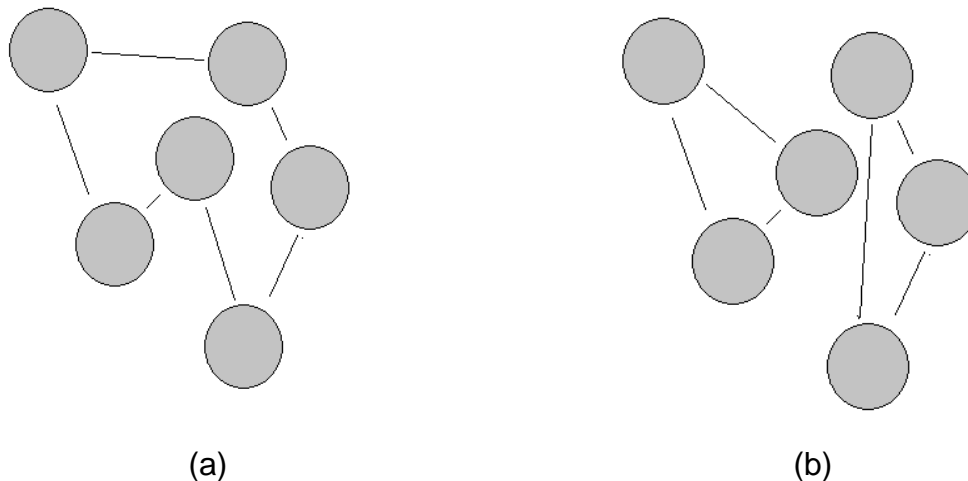
$$X_{\text{"IFSP-CBT", "PONTO DE PARTIDA"}} = 1 \quad (7)$$

Pelo fato de não ser favorável sair de um ponto de parada e ir para ele mesmo, essa situação é desconsiderada com o uso de outra restrição.

$$\sum_i^n X_{ij} = 0, \quad i = j \quad (8)$$

Apenas estas restrições não garantem que a solução final consista em uma única rota contendo todas os pontos de parada, e para isso, torna-se necessário utilizar alguma restrição de eliminação de sub-rotas. Uma sub-rota é um caminho que não considera todos os pontos de parada, e esse tipo de situação deve ser evitada. A Figura 1 apresenta um exemplo de um grafo sem sub-rota (a) e com duas sub-rotas (b).

Figura 1 – Exemplo de um grafo sem sub-rota e outro com sub-rotas



Fonte: Autores (2019).

Öncans et al (2007) apresentam algumas formas de modelar estas restrições. O objetivo será estudar como implementar duas abordagens diferentes de eliminação de sub-rotas e quais são as implicações de seus usos. A seguir serão apresentadas as duas abordagens.

Formulação de Dantzig, Fulkerson e Johnson para eliminação de sub-rotas

Dantzig et al (1954) apresentaram um dos primeiros trabalhos a respeito do TSP, formulando-o como um problema de programação linear inteira, o qual pauta-se em quatro restrições, além da função objetivo (SARUBBI, LUNA, 2003). Dentre estas restrições, encontra-se a sua formulação para eliminação de sub-rotas.

$$\sum_j^n X_{ij} \leq |SR| - 1, \forall i = 1, 2, \dots, n, \forall SR \subset G \quad (9)$$

onde,

G : o grafo contendo todos os vértices.

SR : algum sub-grafo derivado de G .

$|SR|$: número de vértices de SR

A restrição (9) garante que uma possível sub-rotas a ser formada não seja fechada pois o número de arestas deve ser menor ou igual ao número de vértices menos 1 e ao unir (9) com as restrições (4) e (5) essa sub-rotas será forçada se conectar com o restante dos vértices.

Formulação de Gavish e Graves para eliminação de sub-rotas

Grande parte de formulações de ATSP também são conhecidas como formulações de fluxo de commodities, onde existem variáveis que representam fluxos de commodities através das arestas e satisfazem restrições de conservação de fluxo (Oliveira, 2015). Gavish & Graves (1978) propuseram a SCF (*single commodities flow*) como formulação para o problema, e dessa formulação outra restrição de eliminação de sub-rotas surge. Para a sua implementação, é necessário inserir variáveis contínuas G_{ij} não negativas que descrevem o fluxo de um único commodity do vértice i para o j (Öncan et al, 2007).

$$\sum_{j=1}^n G_{ji} - \sum_{j=2}^n G_{ij} = 1, \forall i = 2, \dots, n \quad (10)$$

$$0 \leq G_{ij} \leq nX_{ij}, i = 1, \dots, n, j = 2, \dots, n \quad (11)$$

A restrição (10) refere-se à conservação do fluxo, enquanto (11) obriga que apenas um único commodity de cada item passe pela aresta inicial.

Pode-se optar pela restrição (10) - (11) ou a restrição (9) para compor o modelo (1) – (8) e a implicação dos usos das duas abordagens serão discutidas a seguir.

MATERIAIS E MÉTODOS

O primeiro passo para a implementação computacional do problema consiste em coletar os dados de endereço referente a cada um dos pontos de parada que a van deve respeitar. A partir destes dados, é possível construir matrizes que irão relacionar os parâmetros a serem otimizados.

No total, 12 pontos de parada são levados em consideração. São 10 casas de estudantes, o ponto de partida e a escola de destino. A Figura 2 apresenta a distribuição de pontos de parada na cidade de Santos - SP e a escola em Cubatão – SP em uma ordem arbitrária (que não representa a solução ótima). Os pontos de parada 1 e 12 estão destacados por uma borda azul para representar respectivamente os pontos de partida e finalização do trajeto.

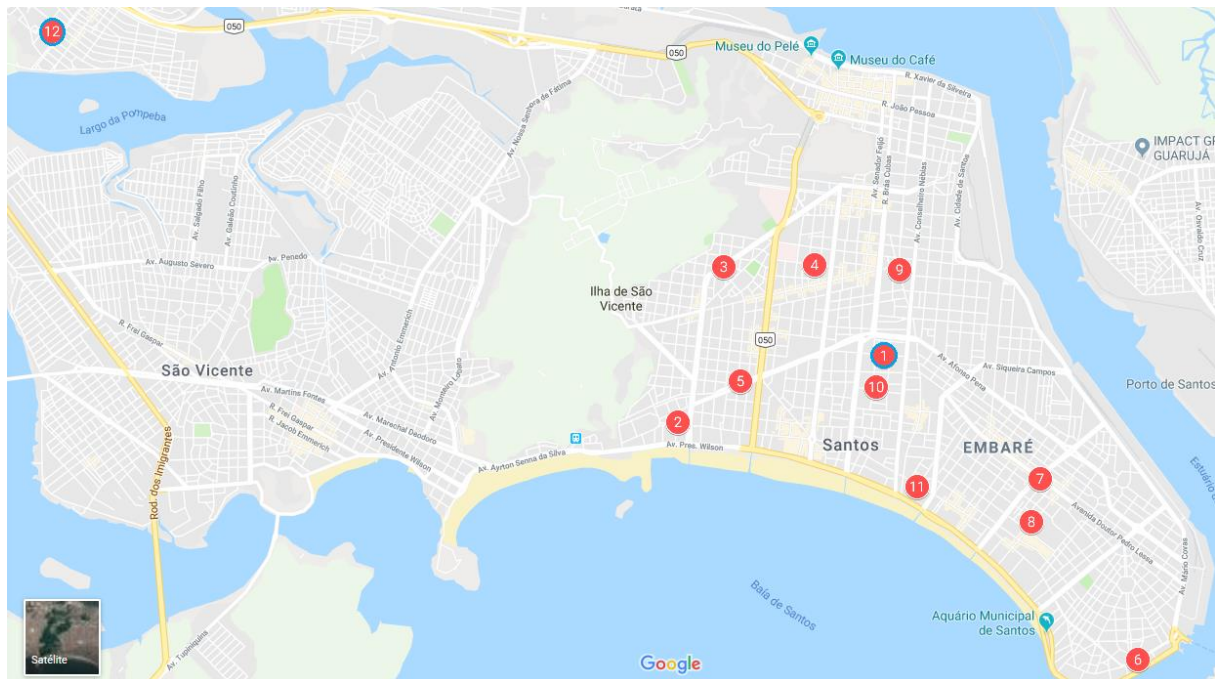


Figura 2 – Localização de cada um dos pontos de parada

Fonte: Google Maps (2019).

Ainda com o auxílio do Google Maps é possível construir a matriz de distâncias. Esta matriz representa o parâmetro D_{ij} anteriormente apresentado e ela foi preenchida com distâncias entre os pontos de parada considerando o trajeto real que a van deve fazer para ir de um ponto ao outro. Na Tabela 1, a matriz de distâncias é

apresentada. A matriz e todo o restante do problema foram criados no Microsoft Excel e o problema de otimização solucionado com o uso do *solver* OpenSolver (Mason, 2011) que é um suplemento criado em VBA que estende as capacidades do *solver* nativo do Excel. O Excel permite que o modelamento do problema seja feito utilizando suas células e funcionalidades em geral enquanto o OpenSolver interpreta as funções do Excel como SOMA() ou SOMARPRODUTO(), o que torna a implementação computacional prática e dinâmica.

Tabela 1 – Matriz de distâncias (km)

		Chegada											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Saída	Ponto de Parada 1	-	3,4	3,5	2,9	3	6,1	3,4	3,5	1,8	0,9	2	12,8
	2	2,9	-	2,5	3,4	1,7	7,7	6,1	5	3,6	3	3,4	11,6
	3	3,1	1,9	-	1,1	1,8	8,6	6,4	6	2,3	3,3	4,7	11,2
	4	2,4	3	1,4	-	2	6,7	5,1	4,9	1,8	2,7	3,3	11,3
	5	3,1	1	1,9	2,5	-	6,6	5,4	4,7	3,2	3,4	3,2	12
	6	5,6	6,3	7,9	7,4	6,2	-	2,7	2,4	6,3	5,1	3,7	17,7
	7	2,8	4,9	5	4,4	4,7	2,9	-	1,9	3,3	2,4	2,3	16,5
	8	3,5	4,6	5,7	5,1	4,5	2,7	0,7	-	4	3,1	1,9	17,2
	9	1,4	3,6	2,7	1,9	3,4	6,3	3,8	4,2	-	1,6	2,7	13,4
	10	0,45	2,6	3,4	2,8	2,1	4,9	2,9	3,2	2,2	-	2,1	14,9
	11	2,6	3,3	4,7	4,3	3,2	3,4	2,2	1,5	3,3	1,7	-	16,4
	12	12,5	12,4	11	11	12	18,1	15,5	15,5	11,6	12,7	14	-

Fonte: Autores (2019).

Uma nova matriz com estrutura idêntica à matriz de distâncias foi criada para servir como matriz de variáveis de decisão (X_{ij}). Essa matriz recebe apenas valores binários que indicarão a escolha ou não de uma rota a ser seguida.

		Chegada											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Saída	Ponto de Parada 1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	6	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	7	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0

8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
12	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 2 – Exemplo de matriz de decisão de rotas (X_{ij})

Fonte: Autores (2019).

Os elementos da Tabela 2 são apenas ilustrativos e não representam as soluções obtidas, por ora. A Tabela 2 exemplifica a rota $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 12$. Na mesma Tabela 2, as restrições (4), (5), (6), (7) e (8) podem ser implementadas. Para (4) e (5), basta somar os elementos das linhas e igualar a 1 (para cada uma das 12 linhas) e o mesmo pode ser feito para as colunas, desta forma, há garantia que só se pode chegar e sair de um ponto de parada apenas uma vez. A restrição (6) implementa-se ao selecionar todos os elementos da matriz e classificá-los como binários no OpenSolver, enquanto a restrição (7) é implementada ao forçar que o elemento $X_{12,1}$ da matriz seja igual a 1, garantindo que a última rota seja considerando a volta da instituição para o ponto de partida. E, por último, a restrição (8) é implementada ao somar-se todos os elementos da diagonal principal da matriz e igualar esta soma a 0.

A partir deste ponto, a abordagem pode divergir dependendo de qual restrição de eliminação de sub-rotas for escolhida.

Implementação computacional da restrição de Dantzig, Fulkerson e Johnson para eliminação de sub-rotas

O processo para implementar esta restrição é gradual, pelo fato de não ser viável conhecer todas as sub-rotas que os pontos podem gerar, então elimina-se apenas aquelas que eventualmente surgem a cada solução. Primeiramente o problema é resolvido sem nenhuma restrição de eliminação de sub-rotas e as que surgirem devem ser eliminadas utilizando a restrição (9), isto é, somam-se os elementos da matriz de decisão de rotas que formam a sub-rota e faz-se essa soma menor ou igual ao número de pontos de parada menos 1. Se por exemplo dos 12 pontos de parada a primeira solução gera as sub-rotas $1 \rightarrow 2 \rightarrow 11 \rightarrow 9 \rightarrow 8 \rightarrow 5 \rightarrow 1$,

$3 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 3$ e $12 \rightarrow 6 \rightarrow 10 \rightarrow 12$, então as restrições a seguir deveriam ser implementadas para eliminá-las:

$$X_{1,2} + X_{2,11} + X_{11,9} + X_{9,8} + X_{8,5} + X_{5,1} \leq 5 \quad (12)$$

$$X_{3,4} + X_{4,7} + X_{7,3} \leq 2 \quad (13)$$

$$X_{12,6} + X_{6,10} + X_{10,12} \leq 2 \quad (14)$$

Essas restrições podem ser implementadas selecionando os elementos da matriz de decisão. O modelo então deve ser resolvido novamente e se novas sub-rotas surgirem, devem ser eliminadas da mesma maneira. A implementação desta restrição pode se tornar problemática se houver uma tendência de muitas sub-rotas surgirem, para o caso estudado, 18 sub-rotas tiveram que ser eliminadas até que a solução contendo os 12 pontos de parada fosse obtida.

Implementação computacional da restrição de Gavish e Graves para eliminação de sub-rotas

Para esta abordagem, não há necessidade de eliminar sub-rotas, em contrapartida o número de variáveis do problema dobra. A implementação necessita de mais duas matrizes, a primeira delas é uma matriz auxiliar que é idêntica a matriz de decisão da Tabela 2, porém multiplicada pelo valor de pontos de parada, 12 no caso. Essa matriz permitirá que o *solver* construa um fluxo ordenado contendo os 12 pontos de uma vez. Para que esse fluxo seja construído, uma outra matriz deverá ser montada, dessa vez os seus elementos serão as variáveis de decisão G_{ij} que devem ser menores ou iguais aos elementos da matriz auxiliar conforme a restrição (11), essa matriz é chamada de matriz de ordenamento de fluxo.

A matriz auxiliar e a matriz de ordenamento de fluxo são respectivamente apresentadas nas Tabelas 3 e 4, novamente vale lembrar que os elementos das matrizes são ilustrativos e não representam a solução obtida.

Tabela 3 – Matriz auxiliar

		Chegada											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Saída	Ponto de Parada												
	1	0	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	3	0	0	0	12	0	0	0	0	0	0	0	0
	4	0	0	0	0	12	0	0	0	0	0	0	0
	5	0	0	0	0	0	12	0	0	0	0	0	0
	6	0	0	0	0	0	0	12	0	0	0	0	0
	7	0	0	0	0	0	0	0	12	0	0	0	0
	8	0	0	0	0	0	0	0	0	12	0	0	0
	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12	0	0
	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12	0
	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12
12	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

Fonte: Autores (2019).

Tabela 4 – Matriz de ordenamento de fluxo (variáveis G_{ij})

		Chegada											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Saída	Ponto de Parada												
	1	0	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	3	0	0	0	9	0	0	0	0	0	0	0	0
	4	0	0	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0
	5	0	0	0	0	0	7	0	0	0	0	0	0
	6	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0
	7	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0
	8	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0
	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0
	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0
	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

Fonte: Autores (2019).

Na Tabela 4, para garantir então que o fluxo contemple todos os pontos de parada a restrição (10) deve ser implementada somando os elementos de uma coluna i e fazendo esta soma menos a soma dos elementos da linha i igual a 1 para todas as linhas e colunas maiores ou iguais a 2.

Com isto feito, o modelo pode ser solucionado e a resposta ótima obtida.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Ambas as abordagens levaram a mesma solução. A matriz de variáveis de decisão contendo a solução ótima é apresentada a seguir na Tabela 5.

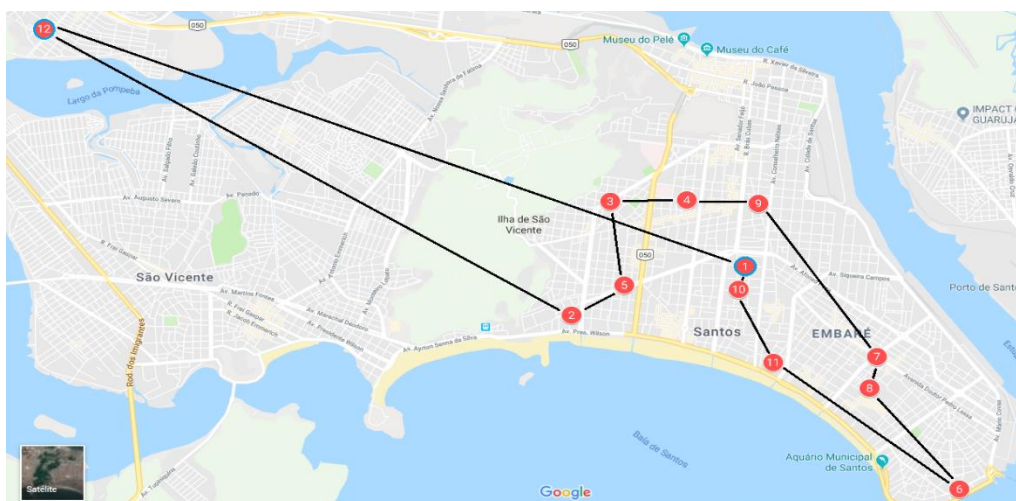
Tabela 5 – Matriz de decisão de rotas (X_{ij}) com solução ótima

		Chegada												
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Saída	Ponto de Parada													
	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
	3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
	4	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	6	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
	7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
	8	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
	9	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
	11	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
12	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		

Fonte: Autores (2019).

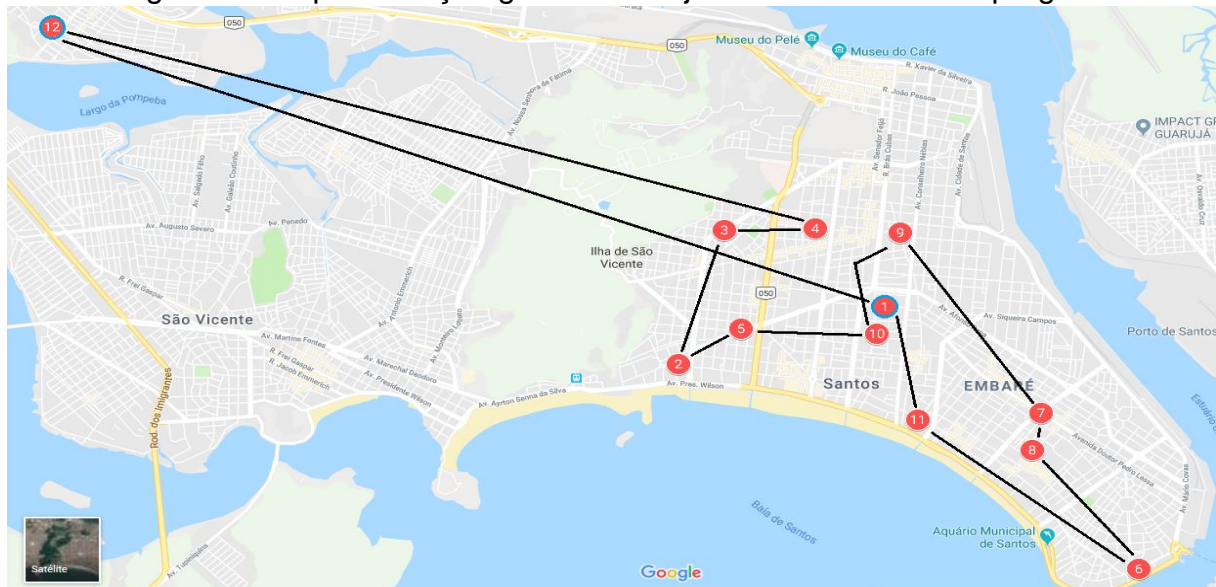
A Figura 3 apresenta a solução ótima obtida (43 km) enquanto a Figura 4 apresenta a trajetória empregada atualmente pela van (44 km). A ligação dos vértices representa apenas a ordem da trajetória e não literalmente o caminho no mapa a ser seguido.

Figura 3 – Representação gráfica da solução ótima obtida com os dois métodos



Fonte: Google Maps (2019).

Figura 4 – Representação gráfica da trajetória atualmente empregada



Fonte: Google Maps (2019).

A solução ótima apresenta uma trajetória com 1 km de distância a menos a ser percorrido. Em meio a comparar o emprego das duas abordagens de eliminação de sub-rotas a Tabela 6 apresenta uma comparação entre os parâmetros do problema e do otimizador.

Tabela 6 – Comparação entre as abordagens de Dantzig, Fulkerson e Johnson e Gravish Graves para eliminação de sub rotas

Parâmetro	Restrição de Dantzig	Restrição de Gavish e Graves
Nº de variáveis	144	288
Nº de restrições	43	36
Nº de iterações	12	41453
Tempo de solução (s)	0.08	8.18
Valor da solução ótima (km)	43	43

Fonte: Autores (2019).

Analisando a Tabela 6, nota-se que a abordagem de Dantzig necessitou de um número maior de restrições, porém em todos os outros pontos, obteve melhores resultados, ela torna a solução mais rápida para o mesmo valor de função objetivo. Vale lembrar que os dados foram obtidos depois que todas as 18 sub-rotas necessárias para se chegar na rota ótima tinham sido eliminadas. No caso da

abordagem de Gavish e Graves, só é necessário rodar o modelo uma única vez, porém notoriamente o problema será mais complexo de ser resolvido.

CONCLUSÃO

A partir dos resultados expostos nota-se que o processo de busca e entrega de alunos para o IFSP – CBT pela van escolar considerada pode ser modelado matematicamente com sucesso e em termos de distância total percorrida, trazer uma solução que se apresenta melhor do que a rota atual, reduzindo em 1 km a distância total percorrida, o que representaria em média 22 km a menos percorridos pela van por mês. Em relação às restrições de eliminação de sub-rotas, nota-se que o emprego da abordagem de Dantzig, Fulkerson e Johnson pode trazer soluções de forma mais rápida, mesmo empregando mais restrições. O seu uso se torna adequado se o número de sub-rotas efetivas a serem eliminadas não se mostrar muito grande, mas se este for o caso, é cabível implementar a restrição de Gavish e Graves pois não há a necessidade de eliminar sub-rotas de forma gradual, porém nota-se que o problema se torna mais complexo e demandará um tempo maior para ser solucionado.

REFERÊNCIAS

ABREU, A; DE OLIVEIRA, S; LACERDA, W. Uma resolução do problema do caixeiro-viajante por mapa auto-organizável com aprendizado winner takes all. **Revista Brasileira de Computação Aplicada**. 7, 1 (fev. 2015), 100-109. 2015.

DANTZIG, G; FULKERSON, R; JOHNSON, S. Solution of a Large-Scale Traveling-Salesman Problem. **Journal of the Operations Research Society of America**, 2(4), 393-410. 1954.

DE OLIVEIRA, M. Reformulações para o problema integrado de dimensionamento e sequenciamento da produção. Tese de doutorado. **Universidade Estadual Paulista “Julio Mesquita Filho”**. São José do Rio Preto. 2015.

Gavish GAVISH, BB, Graves ;GRAVES, SC. The travelling salesman problem and related problems. Working Paper GR-078-78, **Operations Research Center, Massachusetts Institute of Technology**, 1978.

Mapa com localização dos pontos de parada em Santos e Cubatão (SP). **Google Maps**, 2019. Disponível em: <maps.google.com>.

MASON, A.. OpenSolver – An Open Source Add-in to Solve Linear and Integer Programmes in Excel. **OPENSOLVER.ORG**. Disponível em: <opensolver.org >.

MATAI, R, *et al et al*. Traveling Salesman Problem: an Overview of Applications, Formulations, and Solution Approaches. **IntechOpen**. 2010.

ÖNCANS, T. A comparative analysis of several asymmetric traveling salesman problem formulations. **Computers & Operations Research**. v.36. 2007.

SARUBBI, J; LUNA, H. Um modelo linear para o problema do caixeiro viajante com demandas heterogêneas. **XXXV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**. Natal – RN. 2003.

STEINER, M. O problema de roteamento no transporte escolar. **Pesquisa Operacional**. v.20, n. 1.2000.

TAUFER, F; PEREIRA, E. Aplicação do Problema do Caixeiro Viajante na Otimização de Roteiros. **XXXI Encontro Nacional de Engenharia de Produção**. 2011.